

# Stochastic Gradient versus Recursive Least Squares Learning

Sergey Slobodyan, Anna Bogomolova, and Dmitri Kolyuzhnov\*

CERGE-EI<sup>†</sup>  
Politických vězňů 7, 111 21 Praha 1,  
Czech Republic

This version: May 23, 2006

## Abstract

In this paper, we perform an in-depth investigation of relative merits of two adaptive learning algorithms with constant gain, Recursive Least Squares (RLS) and Stochastic Gradient (SG), using the Phelps model of monetary policy as a testing ground. The behavior of the two learning algorithms is very different. Under the mean (averaged) RLS dynamics, the Self-Confirming Equilibrium (SCE) is stable for initial conditions in a very small region around the SCE. Large distance movements of perceived model parameters from their SCE values, or “escapes”, are observed.

On the other hand, the SCE is stable under the SG mean dynamics in a large region. However, actual behavior of the SG learning algorithm is divergent for a wide range of constant gain parameters, including those that could be justified as economically meaningful. We explain the discrepancy by looking into the structure of eigenvalues and eigenvectors of the mean dynamics map under SG learning.

Results of our paper hint that caution is needed when constant gain learning algorithms are used. If the mean dynamics map is stable but not contracting in every direction, and most eigenvalues of the map are close to the unit circle, the constant gain learning algorithm might diverge.

JEL Classification: C62, C65, D83, E10, E17

Keywords: constant gain adaptive learning, E-stability, recursive least squares, stochastic gradient learning

---

\*{*Sergey.Slobodyan, Anna.Bogomolova, Dmitri.Kolyuzhnov*}@*cerge-ei.cz*.

<sup>†</sup>CERGE-EI is a joint workplace of the Center for Economic Research and Graduate Education, Charles University, and the Economics Institute of the Academy of Sciences of the Czech Republic.

## Abstrakt

V této práci podrobně zkoumáme relativní výhody dvou algoritmů adaptivního učení s konstantním výnosem, Rekurzivního algoritmu nejmenších čtverců (Recursive Least Squares, RLS) a Algoritmu stochastického gradientu (Stochastic Gradient, SG), na Phelpsově modelu monetární politiky. Chování těchto dvou algoritmů je velmi odlišné. Uvažujeme-li průměrnou dynamiku RLS, pak je stav Sebe-potvrzující rovnováhy (Self-Confirming Equilibrium, SCE) stabilní pro počáteční podmínky v malé oblasti okolo SCE. Jsou ale pozorovány velké pohyby sledovaných parametrů od SCE hodnot, tzv. “úniky”. Na druhé straně, SCE je stabilní pro průměrnou dynamiku SG v rozsáhlé oblasti. Nicméně chování SG jako algoritmu adaptivního učení je divergentní pro velký rozsah parametrů konstantních výnosů, včetně těch které mohou být vnímány jak ekonomicky realistické. Vysvětlujeme tyto nesrovnalosti pomocí analýzy vlastních hodnot (eigenvalues) a vlastních vektorů (eigenvectors) rozdělení průměrné dynamiky v SG algoritmu adaptivního učení. Výsledky naší práce naznačují, že při používání konstantních výnosů učícího algoritmu je potřeba opatrnosti. Jestliže je rozdělení průměrné dynamiky stabilní, nikoli však ve všech směrech, a většina vlastních hodnot je blízko k jednotkové kružnici, konstantní výnos algoritmu adaptivního učení může divergovat.